BÀI TẬP TỰ LUẬN
CÔNG THỨC BAYES
Lớp 12

Bài tập 1: Hộp thứ nhất có 3 viên bi xanh và 6 viên bi đỏ. Hộp thứ hai có 3 viên bi xanh và 7 viên bi đỏ. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai. Sau đó lại lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ hộp thứ hai. Biết rằng 2 viên bi lấy ra từ hộp thứ hai là bi đỏ, tính xác suất viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất cũng là bi đỏ.

Lời giải

Gọi A là biến cố " lấy được một viên bi màu xanh ở hộp thứ nhất " và B là biến cố " lấy được hai viên bi màu đỏ ở hộp thứ hai"

Khi đó ta có $P(A)=\frac{1}{3}$ thì $P(B|A)=\frac{C_7^2}{C_{11}^2}=\frac{21}{55}$.

Suy ra $P(\overline{A})=1-P(A)=\frac{2}{3}$ thì $P(B|\overline{A})=\frac{C_8^2}{C_{11}^2}=\frac{28}{55}$.

Áp dụng công thức xác suất toàn phần ta có

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{1}{3}.\frac{21}{55}+\frac{2}{3}.\frac{28}{55}=\frac{7}{15}.$$

Xác suất viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất cũng là bi đỏ bằng

$$P(\overline{A}|B)=\frac{P(\overline{A}).P(B|\overline{A})}{P(B)}=\frac{\frac{2}{3}.\frac{28}{55}}{\frac{7}{15}}=\frac{8}{11}.$$

Bài tập 2: Trong một trường học, tỉ lệ học sinh nữ là 52%. Tỉ lệ học sinh nữ và tỉ lệ học sinh nam tham gia câu lạc bộ nghệ thuật lần lượt là 18% và 15%. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của trường. Biết rằng học sinh được chọn có tham gia câu lạc bộ nghệ thuật. Tính xác suất học sinh đó là nam.

Lời giải

Gọi A là biến cố " học sinh được chọn là học sinh nữ " và B là biến cố " Học sinh được chọn tham gia câu lạc bộ nghệ thuật"

Khi đó ta có $P(A)=0,52$, $P(B|A)=0,18$, $P(B|\overline{A})=0,15$

Suy ra $P(\overline{A})=1-P(A)=0,48$.

Áp dụng công thức xác suất toàn phần ta có $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0,52.0,18+0,48.0,15=0,1656$.

Xác suất học sinh đó là nam bằng: $P(\overline{A}|B)=\frac{P(\overline{A}).P(B|\overline{A})}{P(B)}=\frac{0,48.0,15}{0,1656}=\frac{10}{23}$.

Bài tập 3: Tỉ lệ người dân đã tiêm vắc xin phòng bệnh A ở một địa phương là 65%. Trong số những người đã tiêm phòng, tỉ lệ mắc bệnh A là 5%; trong số những người chưa tiêm, tỉ lệ mắc bệnh A là 17%. Chọn ngẫu nhiên một người ở địa phương đó. Biết rằng người đó mắc bệnh A. Tính xác suất người đó không tiêm vắc xin phòng bệnh A.

Lời giải

Gọi X là biến cố "Người dân được tiêm phòng bệnh A"

Y là biến cố "Người dân mắc bệnh A". Ta có: $P(X)=0,65;\ P(\overline{X})=0,35$.

Tỉ lệ mắc bệnh khi tiêm phòng là: $P(Y\mid X)=0,05$.

Tỉ lệ mắc bệnh khi chưa tiêm phòng là $P(Y\mid \overline{X})=0,17$.

Xác suất người này mắc bệnh A là:

$P(Y)=P(X).P(Y\mid X)+P(\overline{X}).P(Y\mid \overline{X})=0,65.0,05+0,35.0,17=0,092$

Xác suất để người bệnh không tiêm phòng là:

$$P(\overline{X}\mid Y)=\frac{P(\overline{X}).P(Y\mid \overline{X})}{P(Y)}=\frac{0,35.0,17}{0,092}=\frac{119}{184}.$$

Bài tập 4: Ở một khu rừng nọ có 7 chú lùn, trong đó có 4 chú luôn nói thật, 3 chú còn lại luôn tự nhận mình nói thật nhưng xác suất để mỗi chú này nói thật là $0,5$. Bạn Tuyết gặp ngẫu nhiên một chú lùn. Gọi A là biến cố "Chú lùn đó luôn nói thật" và B là biến cố "Chú lùn đó tự nhận mình luôn nói thật". Biết rằng chú lùn mà bạn Tuyết gặp tự nhận mình là người luôn nói thật. Tính xác suất để chú lùn đó luôn nói thật.

Lời giải

Ta có trong 7 chú lùn thì có 4 chú lùn luôn nói thật, nên $P(A)=\frac{4}{7}\Rightarrow P(\overline{A})=\frac{3}{7}$

Vì 4 chú lùn luôn nói thật nên $P(B\mid A)=1$.

3 chú lùn còn lại nói thật với xác suất là $0,5$ nên ta có: $P(B\mid \overline{A})=0,5$.

Do đó $P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A}).P(B\mid \overline{A})=\frac{4}{7}.1+\frac{3}{7}.0,5=\frac{11}{14}$.

Xác suất để chú lùn đó luôn nói thật là: $P(A\mid B)=\frac{P(A).P(B\mid A)}{P(B)}=\frac{\frac{4}{7}.1}{\frac{11}{14}}=\frac{8}{11}$.

Bài tập 5: Một bộ lọc được sử dụng để chặn thư rác trong các tài khoản thư điện tử. Tuy nhiên, vì bộ lọc không tuyệt đối hoàn hảo nên một thư rác bị chặn với xác suất $0,95$ và một thư đúng (không phải là thư rác) bị chặn với xác suất $0,01$. Thống kê cho thấy tỉ lệ thư rác là 3%. Chọn ngẫu nhiên một thư bị chặn. Tính xác suất để đó là thư rác (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

Lời giải

Gọi A là biến cố: "Thư được chọn là thư rác"; B là biến cố: "Thư được chọn là bị chặn".

Ta có $P(A)=3\%=0,03$;

$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0,03=0,97$; $P(B\mid A)=0,95$; $P(B\mid \overline{A})=0,01$.

Công thức Bayes, ta có:

$$P(A\mid B)=\frac{P(A).P(B\mid A)}{P(A).P(B\mid A)+P(\overline{A}).P(B\mid \overline{A})}=\frac{0,03.0,95}{0,03.0,95+0,97.0,01}\approx 0,746.$$

Bài tập 6: Một thống kê cho thấy tỉ lệ dân số mắc bệnh hiểm nghèo Y là $0,5\%$. Biết rằng, có một loại xét nghiệm mà nếu mắc bệnh hiểm nghèo Y thì với xác suất 94% xét nghiệm cho kết quả dương tính; nếu không bị bệnh hiểm nghèo Y thì với xác suất 97% xét nghiệm cho kết quả âm tính. Hỏi khi một người xét nghiệm cho kết quả dương tính thì xác suất mắc bệnh hiểm nghèo Y của người đó là bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Lời giải

Xét hai biến cố A: "Người được chọn ra bị mắc bệnh hiểm nghèo Y",

B: "Người được chọn ra có xét nghiệm cho kết quả dương tính"

Do tỉ lệ người mắc bệnh hiểm nghèo Y là $0,5\% = 0,005$ nên trước khi tiến hành xét nghiệm, xác suất mắc bệnh hiểm nghèo Y của một người là $P(A) = 0,005$.

Khi đó: $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,005 = 0,995$.

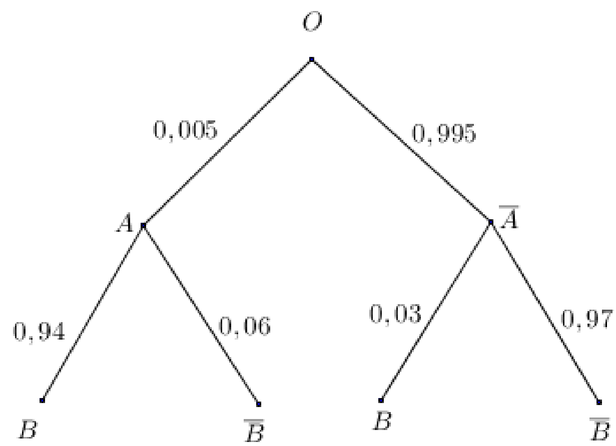
Nếu mắc bệnh hiểm nghèo Y thì với xác suất 94% xét nghiệm cho kết quả dương tính

Khi đó: $P(B \mid A) = 94\% = 0,94$.

Nếu không bị bệnh hiểm nghèo Y thì với xác suất 97% xét nghiệm cho kết quả âm tính

Khi đó: $P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 97\% = 0,97$

Ta có sơ đồ hình cây như sau



Ta thấy xác suất mắc bệnh hiểm nghèo Y của một người khi xét nghiệm cho kết quả dương tính là $P(A \mid B)$.

Áp dụng công thức Bayes, ta có:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A).P(B \mid A)}{P(A).P(B \mid A) + P(\overline{A}).P(B \mid \overline{A})} = \frac{0,005.0,94}{0,005.0,94 + 0,995.0,03} \approx 13,6\%.$$

Vậy xác suất mắc bệnh hiểm nghèo Y của một người khi xét nghiệm cho kết quả dương tính là $13,6\%$.

Bài tập 7: Một loại linh kiện do hai nhà máy số I và số II cùng sản xuất. Tỉ lệ phế phẩm của các nhà máy I và II lần lượt là 4% và 3%. Trong một lô linh kiện để lẫn lộn 80 sản phẩm của nhà máy số I và 120 sản phẩm của nhà máy số II. Một khách hàng lấy ngẫu nhiên một linh kiện từ lô hàng đó. Giả sử linh kiện được lấy ra là linh kiện phế phẩm. Xác suất linh kiện đó do nhà máy nào sản xuất là cao hơn?

Lời giải

Xét hai biến cố sau: A: ''Linh kiện lấy ra do nhà máy I sản xuất",

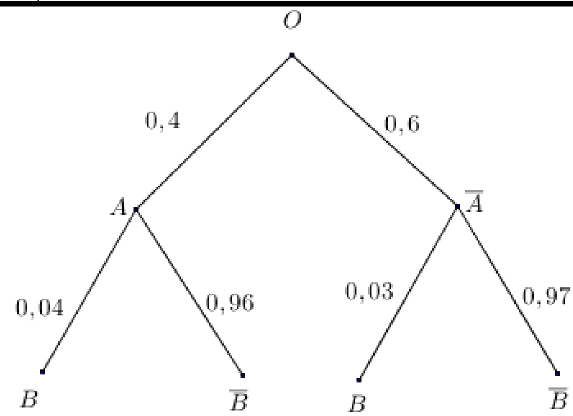
B: ''Linh kiện lấy ra là phế phẩm"

Trong lô linh kiện có tổng cộng $80 + 120 = 200$ linh kiện nên $P(A) = \frac{80}{200} = 0,4$; $P(\overline{A}) = 0,6$.

Vì tỉ lệ phế phẩm của các nhà máy I và II lần lượt là 4% và 3% nên $P(B \mid A) = 4\% = 0,04$

Khi đó: $P(B \mid \overline{A}) = 3\% = 0,03$.

Ta có sơ đồ cây:



Khi linh kiện lấy ra là phế phẩm thì xác suất linh kiện đó do nhà máy I sản xuất là $P\left(A\,|\,B\right)$ và xác suất linh kiện đó do nhà máy II sản xuất là $P\left(\overline{A}\,|\,B\right)$.

Áp dụng công thức Bayes, ta có:

$$P\left(A\,|\,B\right)=\frac{P\left(A\right).P\left(B\,|\,A\right)}{P\left(A\right).P\left(B\,|\,A\right)+P\left(\overline{A}\right).P\left(B\,|\,\overline{A}\right)}=\frac{0,4.0,04}{0,4.0,04+0,6.0,03}\approx 47\%.$$

Suy ra $P\left(\overline{A}\,|\,B\right)=1-P\left(A\,|\,B\right)\approx 53\%$.

Vậy xác suất linh kiện đó do nhà máy II sản xuất là cao hơn.

Bài tập 8: Một nhà máy sản xuất điện thoại có hai dây chuyền sản xuất I và II. Sản phẩm điện thoại di động được sản xuất của dây chuyền I chiếm 70% còn điện thoại di động được sản xuất dây chuyền II chiếm 30% tổng sản phẩm của công ty. Tỉ lệ sản phẩm bị lỗi của dây chuyền I chiếm 2% còn của dây chuyền II chiếm 3% tổng sản phẩm công ty. Giả sử một chiếc điện thoại di động ngẫu nhiên được kiểm tra và phát hiện bị lỗi. Tính xác suất chiếc điện thoại này được sản xuất bởi dây chuyền I.

Lời giải

Gọi A là biến cố: "Sản phẩm bị lỗi".

B là biến cố: "Điện thoại được chọn do dây chuyền I sản xuất".

Suy ra $\overline{B}$ là biến cố: "Điện thoại được chọn do dây chuyền II sản xuất".

Ta có $P\left(B\right)=0,7$ và $P\left(\overline{B}\right)=1-0,7=0,3$; $P\left(A\,|\,B\right)=0,02$ và $P\left(A\,|\,\overline{B}\right)=0,03$.

Khi đó xác suất để điện thoại được chọn ra bị lỗi là:

$$P\left(A\right)=P\left(B\right).P\left(A\,|\,B\right)+P\left(\overline{B}\right).P\left(A\,|\,\overline{B}\right)=0,7.0,02+0,3.0,03=0,023.$$

Do điện thoại lấy ra bị lỗi nên xác suất điện thoại đó do dây chuyền I sản xuất là:

$$P\left(B\,|\,A\right)=\frac{P\left(B\right).P\left(A\,|\,B\right)}{P\left(A\right)}=\frac{0,7.0,02}{0,023}=\frac{14}{23}.$$

Vậy xác suất một chiếc điện thoại bị lỗi được sản xuất bởi dây chuyền I là khoảng $60,87\%$.