BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN
CÔNG THỨC BAYES
Lớp 12

Câu 1: Tại một địa phương có 500 người cao tuổi, bao gồm 260 nam và 240 nữ. Trong đó nhóm người cao tuổi nam và nữ lần lượt có 40% và 55% bị bệnh tiểu đường. Chọn ngẫu nhiên một người. Xác suất để chọn được một người không bị bệnh tiểu đường là bao nhiêu?*(làm tròn kết quả đến chữ số hàng phần trăm)*

Lời giải

Xét các biến cố:

A: " Chọn được người không bị tiểu đường"

B: " Chọn được người cao tuổi là nam"

$\overline{B}$: " Chọn được người cao tuổi là nữ "

Từ giải thuyết ta có $P(B)=\dfrac{260}{500}=0,52$; $P(A\,|\,B)=1-0,4=0,6$;

$P(\overline{B})=\dfrac{240}{500}=0,48$; $P(A\,|\,\overline{B})=1-0,55=0,45$

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có

$$P(A)=P(B).P(A\,|\,B)+P(\overline{B}).P(A\,|\,\overline{B})=0,52.0,6+0,48.0,45=0,528\approx 0,53.$$

Câu 2: Một loại linh kiện do hai nhà máy I,II cùng sản xuất. Tỉ lệ phế phẩm của nhà máy I,II lần lượt là : $0,04;0,03$. Trong một lô linh kiện để lẫn lộn 80 sản phẩm của nhà máy I và 120 sản phẩm của nhà máy II. Một khách hàng lấy ngẫu nhiên một linh kiện của lô hàng đó. Giả sử linh kiện được chọn là phế phẩm. Tính xác suất linh kiện này thuộc nhà máy I.*(làm tròn kết quả đến chữ số hàng phần trăm).*

Lời giải

Ta xét các biến cố

A: " Linh kiện được lấy ra là phế phẩm"

B: " Linh kiện lấy ra từ nhà máy I "

$\overline{B}$: " Linh kiện lấy ra từ nhà máy II "

Theo giả thuyết ta có $P(B)=\dfrac{80}{200}=0,4$; $P(\overline{B})=\dfrac{120}{200}=0,6$; $P(A\,|\,B)=0,04$; $P(A\,|\,\overline{B})=0,03$

Theo công thức toàn phần xác suất lấy linh kiện là phế phẩm là

$P(A)=P(B).P(A\,|\,B)+P(\overline{B}).P(A\,|\,\overline{B})=0,4.0,04+0,6.0,03=0,034$.

Mặt khác theo công thức Bayes xác suất linh kiện phế phẩm do nhà máy I sản xuất là:

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(B).P(A\,|\,B)}{P(A)}=\frac{0,4.0,04}{0,034}=\frac{8}{17}\approx 0,47$$

Câu 3: Có 2 xạ thủ loại I và 8 xạ thủ loại II, xác suất bắn trúng đích của các xạ thủ loại I và loại II lần lượt là $0,9$ và $0,7$. Chọn ngẫu nhiên một xạ thủ và xạ thủ đó bắn trúng đích, tính xác suất để xạ thủ đó là xạ thủ loại I?

Lời giải

Gọi A là biến cố " viên đạn trúng đích".

B_1 là biến cố " chọn xạ thủ loại I bắn"; B_2 là biến cố " chọn xạ thủ loại II bắn".

$P(B_1)=\frac{2}{10}=0,2$; $P(A|B_1)=0,9$; $P(B_2)=\frac{8}{10}=0,8$; $P(A|B_2)=0,7$.

Hai biến cố $B_1;B_2$ tạo thành họ đầy đủ các biến cố. Áp dụng công thức xác suất toàn phần ta có:

$$P(A)=P(B_1).P(A|B_1)+P(B_2).P(A|B_2)=0,2.0,9+0,8.0,7=0,74.$$

Áp dụng công thức Bayes có: $P(B_1|A)=\frac{P(A\mid B_1)P(B_1)}{P(A)}=\frac{0,9.0,2}{0,74}=\frac{9}{37}\approx 0,24.$

Câu 4: Một công ty du lịch bố trí chỗ nghỉ cho đoàn khách tại ba khách sạn A,B,C theo tỉ lệ 20%, 50%, 30%. Tỉ lệ hỏng điều hòa ở ba khách sạn lần lượt là 5%, 4%, 8%. Tính xác suất để một khách ở khách sạn C, biết khách đó ở phòng điều hòa không bị hỏng (kết quả để dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Gọi biến cố H: "Khách nghỉ ở phòng có điều hòa bị hỏng"

A: "Khách nghỉ tại khách sạn A"

B: "Khách nghỉ tại khách sạn B"

C: "Khách nghỉ tại khách sạn C"

Theo bài ra ta có: $P(A)=0,2$; $P(B)=0,5$; $P(C)=0,3$.

$P(H\mid A)=0,05$; $P(H\mid B)=0,04$; $P(H\mid C)=0,08$

Áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có:

$P(H)=P(A).P(H\mid A)+P(B).P(H\mid B)+P(C).P(H\mid C)$

$=0,2.0,05+0,5.0,04+0,3.0,08=0,054$.

Áp dụng công thức Bayes, xác suất để một khách ở khách sạn A, biết khách đó ở phòng điều hòa bị hỏng là:

$$P(A\mid H)=\frac{P(A).P(H\mid A)}{P(H)}=\frac{0,2.0,05}{0,054}=\frac{5}{27}\simeq 0,19.$$

Áp dụng công thức Bayes, xác suất để một khách ở khách sạn C, biết khách đó ở phòng điều hòa không bị hỏng là:

$$P(C\mid \overline{H})=\frac{P(C).P(\overline{H}\mid C)}{P(\overline{H})}=\frac{0,3.(1-0,08)}{1-0,054}=\frac{138}{473}\simeq 0,29.$$

Câu 5: Cho hộp I gồm 5 bi trắng và 5 bi đỏ, hộp II gồm 6 bi trắng và 4 bi đỏ. Bỏ ngẫu nhiên hai bi từ hộp I sang hộp II. Sau đó lấy ngẫu nhiên từ hộp II một bi. Giả sử lấy được viên bi trắng. Tính xác suất để lấy được bi trắng từ hộp I. (kết quả để dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Gọi K_1: "Bi lấy ra từ hộp II là bi của hộp I"

K_2: "Bi lấy ra từ hộp II là bi của hộp II"

A: "Lấy được bi trắng"

Ta có: $P(K_1)=\dfrac{C_2^1}{C_{12}^1}=\dfrac{1}{6}$; $P(K_2)=\dfrac{C_{10}^1}{C_{12}^1}=\dfrac{5}{6}$; $P(A\,|\,K_1)=\dfrac{C_5^1}{C_{10}^1}=\dfrac{1}{2}$; $P(A\,|\,K_2)=\dfrac{C_6^1}{C_{10}^1}=\dfrac{3}{5}$.

Áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có xác suất để lấy được bi trắng là:

$$P(A)=P(K_1).P(A\,|\,K_1)+P(K_2).P(A\,|\,K_2)=\frac{1}{6}.\frac{1}{2}+\frac{5}{6}.\frac{3}{5}=\frac{7}{12}\simeq 0,58.$$

Áp dụng công thức Bayes, xác suất để lấy được bi trắng của hộp I là:

$$P(K_1\,|\,A)=\frac{P(K_1).P(A\,|\,K_1)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{6}.\frac{1}{2}}{\frac{7}{12}}=\frac{1}{7}\simeq 0,14.$$

Câu 6: Một xét nghiệm Covid – 19 cho kết quả dương tính với 90% các trường hợp thực sự nhiễm virus và cho kết quả âm tính với 80% các trường hợp thực sự không nhiễm virus. Biết rằng tỉ lệ người nhiễm Covid – 19 trong một cộng đồng nào đó là 1%. Một người trong cộng đồng đó cho kết quả xét nghiệm dương tính. Xác suất để người đó thực sự bị nhiễm virus có dạng $\dfrac{a}{b}$ (Phân số tối giản). Giá trị của $a+b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Gọi A là biến cố "Người đó bị nhiễm Virus"; B là biến cố "Người đó cho kết quả dương tính".

Xét nghiệm Covid – 19 cho kết quả dương tính với 90% các trường hợp thực sự nhiễm virus $P(B\,|\,A)=0,9$.

Xét nghiệm Covid – 19 cho kết quả âm tính với 80% các trường hợp thực sự không nhiễm virus, nên cho kết quả dương tính với 20% các trường hợp không thực sự nhiễm virus $P(B\,|\,\overline{A})=0,2$

$P(A)=0,01\Rightarrow P(\overline{A})=0,99$

Do đó xác suất để người đó cho kết quả dương tính là:

$$P(B)=P(A).P(B\,|\,A)+P(\overline{A}).P(B\,|\,\overline{A})=0,01.0,9+0,99.0,2=0,207$$

Xác suất để người nhiễm virus cho kết quả dương tính là:

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(A).P(B\,|\,A)}{P(B)}=\frac{0,01.0,9}{0,207}=\frac{1}{23}$$

Vậy $a=1,b=23\Rightarrow a+b=24$.

Câu 7: Tỷ lệ người nghiện thuốc lá tại một vùng là 30%. Biết rằng tỷ lệ người bị viêm họng trong số những người nghiện thuốc là 60%, còn tỷ lệ người bị viêm họng trong số những người không nghiện là 40%. Lấy ngẫu nhiên một người thấy người ấy không bị viêm họng. Tính xác suất người đó nghiện thuốc lá. *(Làm tròn kết quả tới hàng phần trăm)*

Lời giải

Gọi A là biến cố "Người này bị nghiện thuốc lá"; B là biến cố "Người này không bị viêm họng"

Ta có $P(A)=0,3 \Rightarrow P(\overline{A})=0,7$.

Tỷ lệ người bị viêm họng trong số người bị nghiện thuốc là $P(\overline{B} \mid A)=0,6$

Tỷ lệ người bị viêm họng trong số người không bị nghiện thuốc là $P(\overline{B} \mid \overline{A})=0,4$

Do đó $P(\overline{B})=P(A).P(\overline{B} \mid A)+P(\overline{A}).P(\overline{B} \mid \overline{A})=0,3.0,6+0,7.0,4=0,46$.

Suy ra $P(B)=1-P(\overline{B})=0,54$.

$$P(A \mid B)=\frac{P(A).P(B \mid A)}{P(B)}=\frac{0,3.0,4}{0,54}=\frac{2}{9} \approx 0,22.$$

Câu 8: Trong một đợt nghiên cứu tỷ lệ ung thư do hút thuốc lá gây nên, người ta thấy rằng tại tỉnh Hà Nam tỉ lệ người dân của tỉnh nghiện thuốc lá là 20%; tỉ lệ người bị bệnh ung thư trong số người nghiện thuốc lá là 70%, trong số người không nghiện thuốc lá là 15%. Hỏi khi gặp một người bị bệnh ung thư tại tỉnh này thì xác suất người đó nghiện thuốc lá là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Lời giải

Gọi A là biến cố "người nghiện thuốc lá", suy ra $\overline{A}$ là biến cố "người không nghiện thuốc lá"

Gọi B là biến cố "người bị bệnh ung thư"

Theo giả thiết ta có: $P(A)=0,2 \Rightarrow P(\overline{A})=0,8;\ P(B \mid A)=0,7;\ P(B \mid \overline{A})=0,15$

Áp dụng công thức xác suất toàn phần ta có:

$$P(B)=P(A).P(B \mid A)+P(\overline{A}).P(B \mid \overline{A})=0,2.0,7+0,8.0,15=0,26$$

Xác suất mà người đó là nghiện thuốc lá khi biết bị bệnh ung thư là $P(A \mid B)$

Theo công thức Bayes, ta có: $P(A \mid B)=\dfrac{P(A).P(B \mid A)}{P(B)}=\dfrac{0,2.0,7}{0,26}=\dfrac{7}{13} \approx 0,54$.

Như vậy khi gặp một người bị bệnh ung thư tại tỉnh này thì xác suất (làm tròn đến hàng phần trăm) người đó nghiện thuốc lá là $0,54$.

Câu 9: Một đội bắn súng gồm có 8 nam và 2 nữ. Xác suất bắn trúng của các xạ thủ nam là 0,8 còn của các xạ thủ nữ là 0,9. Chọn ngẫu nhiên một xạ thủ bắn một viên đạn và xạ thủ đó đã bắn trúng. Tính xác suất (làm tròn đến hàng phần trăm) để xạ thủ đó là nữ?

Lời giải

Gọi A là biến cố "Xạ thủ được chọn là nữ", suy ra $\overline{A}$ là biến cố "xạ thủ được chọn là nam"

Gọi B là biến cố "xạ thủ được chọn bắn trúng"

Theo giả thiết ta có: $P(A)=\frac{2}{2+8}=\frac{1}{5}\Rightarrow P(\overline{A})=\frac{4}{5}$; $P(B\mid A)=0,9$; $P(B\mid \overline{A})=0,8$

Áp dụng công thức xác suất toàn phần ta có:

$$P(B)=P(A).P(B\mid A)+P(\overline{A}).P(B\mid \overline{A})=\frac{1}{5}.0,9+\frac{4}{5}.0,8=0,82$$

Xác suất để xạ thủ được chọn ra bắn trúng đó là nữ là $P(A\mid B)$

Theo công thức Bayes, ta có: $P(A\mid B)=\frac{P(A).P(B\mid A)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{5}.0,9}{0,82}=\frac{9}{41}\approx 0,22$.

Vậy xác suất để xạ thủ bắn trúng đó là nữ là $0,22$.

Câu 10: Một nhà máy sản xuất bóng đèn có tỉ lệ bóng đèn đạt tiêu chuẩn là 80%. Trước khi xuất ra thị trường, mỗi bóng đèn đều được kiểm tra chất lượng. Vì sự kiểm tra không thể tuyệt đối hoàn hảo nên tỉ lệ công nhận một bóng đèn đạt tiêu chuẩn là 0,9 và tỉ lệ loại bỏ một bóng hỏng là 0,95. Hãy tính tỉ lệ bóng đạt tiêu chuẩn sau khi qua khâu kiểm tra chất lượng.

Lời giải

Gọi A là biến cố "bóng đạt chuẩn sau khi qua kiểm tra chất lượng"

B là biến cố "sản phẩm đạt tiêu chuẩn".

Theo bài ra ta có: $P(B)=0,8$; $P(\overline{B})=1-0,8=0,2$

Do tỉ lệ công nhận một bóng đèn đạt tiêu chuẩn là 0,9 nên $P(A\mid B)=0,9$.

Tỉ lệ loại bỏ một bóng hỏng là 0,95 nên $P(A\mid \overline{B})=1-0,95=0,05$.

Theo công thức xác suất toàn phần ta có:

$$P(A)=P(B).P(A\mid B)+P(\overline{B}).P(A\mid \overline{B})=0,8.0,9+0,2.0,05=0,73.$$

Câu 11: Một lớp học có số học sinh nữ chiếm 45% tổng số học sinh cả lớp. Cuối năm tổng kết, lớp học đó có tỉ lệ học sinh giỏi là nữ là 30%, học sinh giỏi là nam chiếm 40%. Giáo viên chủ nhiệm cần chọn 1 học sinh của lớp để đại diện cho lớp lên nhận thưởng. Biết rằng học sinh được chọn là học sinh giỏi. Tính xác suất để em đó là nữ.
Chú ý: Các kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.

Lời giải

Gọi A là biến cố "học sinh được chọn là học sinh giỏi"

B là biến cố "học sinh được chọn là học sinh nữ".

Theo bài ra ta có: $P(B)=0,45$; $P(\overline{B})=1-0,45=0,55$.

Do lớp học đó có tỉ lệ học sinh giỏi là nữ là 30%, học sinh giỏi là nam chiếm 40% nên:

$P(A|B)=0,3$ và $P\left(A|\overline{B}\right)=0,4$.

Theo công thức xác suất toàn phần ta có:

$P(A)=P(B).P(A|B)+P\left(\overline{B}\right).P\left(A|\overline{B}\right)=0,45.0,3+0,55.0,4\simeq 0,36$.

Gọi C là biến cố "học sinh giỏi được chọn là học sinh nữ" thì $C=B|A$ nên theo công thức Bayes ta có:

$P(B|A)=\dfrac{P(B).P(A|B)}{P(A)}=\dfrac{0,45.0,3}{0,355}\simeq 0,38$.

Câu 12: Công ty sữa Việt Nam phát phiếu thăm dò khách hàng ở một thành phố với hai câu hỏi: "Tháng vừa rồi bạn có xem quảng cáo về Vinamilk không?" và "Tháng vừa rồi bạn có mua sản phẩm nào của Vinamilk không?". Kết quả thăm dò như sau: Số người xem quảng cáo Vinamilk chiếm tỉ lệ 40% tổng số người khảo sát, số người có mua sản phẩm của Vinamilk chiếm tỉ lệ 25% tổng số người khảo sát. Trong số người mua sản phẩm của Vinamilk thì số người xem quảng cáo chiếm tỉ lệ 60%. Chọn ngẫu nhiên một khách hàng trong số các khách hàng đã xem quảng cáo về Vinamilk. Xác suất khách hàng đó mua sản phẩm Vinamilk khi đã xem quảng cáo là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi A là biến cố "Có mua sản phẩm của Vinamilk".
Gọi B là biến cố "Có xem quảng cáo của Vinanilk".
Khi đó ta tính $P(A|B)$ tức là tính xác suất biến cố "Có mua sản phẩm của Vinamilk khi đã xem quảng cáo".

Theo công thức Bayes ta có $P(A|B)=\dfrac{P(A).P(B|A)}{P(B)}$.

Ta có xác suất của biến cố A là: $P(A)=25\%=\dfrac{1}{4}$.

Xác suất của biến cố B là: $P(B)=40\%=\dfrac{2}{5}$.

Xác suất khách hàng xem quảng cáo khi đã mua sản phẩm của Vinamilk: $P(B|A)=60\%=\dfrac{3}{5}$

Xác suất khách hàng mua sản phẩm khi xem quảng cáo là:

$$P(A|B)=\frac{P(A).P(B|A)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}.\frac{3}{5}}{\frac{2}{5}}=\frac{3}{8}.$$

Câu 13: Dây chuyền lắp ráp nhận được các chi tiết do hai máy sản xuất. Trung bình máy thứ nhất cung cấp 70% chi tiết, máy thứ hai cung cấp 30% chi tiết. Khoảng 95% chi tiết do máy thứ nhất sản xuất là đạt tiêu chuẩn, còn 80% chi tiết do máy thứ hai sản xuất là đạt tiêu chuẩn. Lấy ngẫu nhiên từ dây chuyền một sản phẩm, thấy nó đạt tiêu chuẩn. Tìm xác suất để sản phẩm đó do máy thứ nhất sản xuất.

Lời giải

Gọi A là biến cố " Chi tiết lấy từ dây chuyền sản xuất đạt chuẩn".

Gọi B_1 là biến cố "Chi tiết do máy thứ nhất sản xuất".

B_2 là biến cố "Chi tiết do máy thứ hai sản xuất"

Khi đó ta tính $P\left(B_1 \mid A\right)$ tức là tính xác suất biến cố "Chi tiết đó do máy thứ nhất sản xuất khi nó là sản phẩm đạt chuẩn".

Theo công thức Bayes ta có $P\left(B_1 \mid A\right)=\dfrac{P\left(B_1\right).P\left(A \mid B_1\right)}{P\left(B_1\right).P\left(A \mid B_1\right)+P\left(B_2\right).P\left(A \mid B_2\right)}$.

Ta có: $P\left(B_1\right)=0,7$; $P\left(B_2\right)=0,3$; $P\left(A \mid B_1\right)=0,95$; $P\left(A \mid B_2\right)=0,80$.

Xác suất để chi tiết đó do máy thứ nhất sản xuất khi nó là sản phẩm đạt chuẩn:

$$P\left(B_1 \mid A\right)=\frac{P\left(B_1\right).P\left(A \mid B_1\right)}{P\left(B_1\right).P\left(A \mid B_1\right)+P\left(B_2\right).P\left(A \mid B_2\right)}=\frac{0,7.0,95}{0,7.0,95+0,3.0,8}=\frac{133}{181}\approx 0,7348.$$

Câu 14: Một căn bệnh có 1% dân số mắc phải. Một phương pháp chuẩn đoán được phát triển có tỷ lệ chính xác là: Với những người bị bệnh, phương pháp này sẽ đưa ra kết quả dương tính 98%. Với những người không mắc bệnh, phương pháp này cũng chuẩn đoán đúng 98 trong 100 trường hợp không mắc bệnh (tức là có 2 người không mắc bệnh nhưng xuất hiện dương tính "giả"). Nếu một người kiểm tra và kết quả là dương tính, xác suất để người đó thực sự bị bệnh là bao nhiêu?.

Lời giải

Gọi biến cố A: "Người đó mắc bệnh",

biến cố B: "Kết quả kiểm tra của người đó là dương tính".

Ta cần tìm $P\left(A \mid B\right)$: xác suất một người bị bệnh trong điều kiện người đó kiểm tra kết quả là dương tính.

Căn bệnh có 1% dân số mắc phải nên xác suất để một người mắc bệnh là $P\left(A\right)=1\%$.

Xác suất để người đó không mắc bệnh là $P\left(\overline{A}\right)=99\%$.

$P\left(B \mid A\right)=98\%$: xác suất kết quả dương tính nếu người đó mắc bệnh.

$P\left(B \mid \overline{A}\right)=2\%$: xác suất kết quả dương tính nếu người đó không mắc bệnh.

Theo công thức Bayes:

$$P\left(A \mid B\right)=\frac{P\left(A\right).P\left(B \mid A\right)}{P\left(A\right).P\left(B \mid A\right)+P\left(\overline{A}\right).P\left(B \mid \overline{A}\right)}=\frac{0,01.0,98}{0,01.0,98+0,99.0,02}=\frac{49}{148}\approx 33\%.$$

Vậy xác suất để người đó mắc bệnh nếu kết quả dương tính là 33%.

Câu 15: Trước khi đưa sản phẩm ra thị trường, người ta đã phỏng vấn ngẫu nhiên 200 khách hàng về sản phẩm đó và thấy có 50 người trả lời "sẽ mua", 90 người trả lời "có thể sẽ mua" và 60 người trả lời "không mua". Kinh nghiệm cho thấy tỷ lệ khách hàng thực sự sẽ mua sản phẩm tương ứng với những cách trả lời trên tương ứng là 60%, 40% và 1%. Trong số khách hàng thực sự mua sản phẩm thì xác suất khách hàng trả lời "sẽ mua" là $\dfrac{a}{b}$. Tính giá trị của biểu thức $T=\dfrac{1}{2}a+b$.

Lời giải

Gọi biến cố A: "Người được phỏng vấn sẽ mua sản phẩm".

Biến cố H_1: "Khách hàng được phỏng vấn trả lời sẽ mua".

Biến cố H_2: "Khách hàng được phỏng vấn trả lời có thể sẽ mua".

Biến cố H_3: "Khách hàng được phỏng vấn trả lời không mua".

Ta có $P(H_1)=\frac{50}{200}=0,25$ $\quad P(H_2)=\frac{90}{200}=0,45$ $\quad P(H_3)=\frac{60}{200}=0,3$

$P(A|H_1)=0,6$; $P(A|H_2)=0,4$; $P(A|H_3)=0,1$

Áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có tiềm năng của sản phẩm đó trên thị trường là

$P(A)=P(H_1).P(A|H_1)+P(H_2).P(A|H_2)+P(H_3).P(A|H_3)$
$=0,25.0,6+0,45.0,4+0,3.0,1=0,36.$

Theo công thức Bayes, ta có xác suất khách hàng trả lời "sẽ mua" là

$$P(H_1|A)=\frac{P(H_1).P(A|H_1)}{P(A)}=\frac{0,25.0,6}{0,36}=\frac{5}{12}.$$

Suy ra $a=5,b=12$. Vậy $T=\frac{1}{2}a+b=\frac{1}{2}.5+12=14,5.$

Câu 16: Một nhà đầu tư phân loại các dự án trong một chu kỳ đầu tư thành 3 loại: ít rủi ro, rủi ro trung bình và rủi ro cao. Tỷ lệ các dự án các loại đó tương ứng là $20\%;\ 45\%$ *và* 35%. Kinh nghiệm cho thấy tỷ lệ các dự án gặp rủi ro khi đầu tư tương ứng là $5\%;\ 20\%$ *và* 40%. Nếu một dự án gặp rủi ro sau kỳ đầu tư thì khả năng dự án rủi ro lớn nhất là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi A là biến cố dự án gặp rủi ro trong kỳ đầu tư.

H_i $(i=1,2,3)$ lần lượt là các biến cố dự án thuộc loại ít rủi ro, rủi ro trung bình và rủi ro cao

$P(H_1)=0,2$; $P(H_2)=0,45$; $P(H_3)=0,35$.

$P(A|H_1)=0,05$; $P(A|H_2)=0,2$; $P(A|H_2)=0,4$.

$P(A)=P(H_1).P(A|H_1)+P(H_2).P(A|H_2)+P(H_3).P(A|H_3)=0,24$.

$P(H_1|A)=\frac{P(H_1).P(A|H_1)}{P(A)}\approx 0,04$; $P(H_2|A)=\frac{P(H_2).P(A|H_2)}{P(A)}\approx 0,38$.

$P(H_3|A)=\frac{P(H_3).P(A|H_3)}{P(A)}\approx 0,58$

Vậy khả năng dự án gặp rủi ro là cao nhất là $0,58$.

Câu 17: Có hai đồng xu có hình thức giống nhau, trong có có một đồng xu cân đối đồng chất và một đồng xu không cân đối có xác suất khi tung đồng xu xuất hiện mặt ngửa là $\frac{2}{3}$. Một người lấy ngẫu nhiên một đồng xu trong hai đồng xu đã cho, tung đồng xu đó 3 lần thì đều thấy xuất hiện mặt ngửa, xác suất người đó lấy được đồng xu cân đối là bao nhiêu? (*Làm tròn đến hàng phần mười.*)

Lời giải

Gọi A là biến cố: "Lấy được đồng xu cân đối đồng chất" và B là biến cố: "Tung đồng xu ba lần đều xuất hiện mặt ngửa". Khi đó ta cần tính $P(A|B)$.

Ta có $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(\overline{A})=\frac{1}{2}$ và $P(B|A)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$, $P(B|\overline{A})=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$.

Theo công thức Bayes và công thức xác suất toàn phần ta có

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{27}}\approx 0.3.$$

Câu 18: Trường X có 20% học sinh tham gia câu lạc bộ thể thao, trong số học sinh đó có 85% học sinh biết chơi môn bóng bàn. Ngoài ra, có 10% số học sinh không tham gia câu lạc bộ thể thao cũng biết chơi môn bóng bàn. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh của trường. Giả sử học sinh đó biết chơi môn bóng bàn. Xác suất chọn được học sinh thuộc câu lạc bộ thể thao là $\frac{a}{b}$. Tính $a-b$?

Lời giải

Xét các biến cố: A: "Chọn được học sinh thuộc câu lạc bộ thể thao";

B: "Chọn được học sinh biết chơi bóng bàn".

Khi đó, $P(A)=0,2;\ P(\overline{A})=0,8;\ P(B|A)=0,85;\ P(B|\overline{A})=0,1$.

Theo công thức xác suất toàn phần ta có:

$$P(B)=P(A).P(B|A)+P(\overline{A}).P(B|\overline{A})=0,2.0,85+0,8.0,1=0,25.$$

Theo công thức Bayes, xác suất chọn được học sinh thuộc câu lạc bộ thể thao, biết học sinh đó chơi được môn bóng bàn là:

$$P(A|B)=\frac{P(A).P(B|A)}{P(B)}=\frac{0,2.0,85}{0,25}=\frac{17}{25} \text{ nên } a=17, b=25 \Rightarrow a-b=-8.$$

Câu 19: Một nhà máy sản xuất linh kiện điện tử có ba dây chuyền sản xuất A, B và C. Dây chuyền A sản xuất 50% số linh kiện, dây chuyền B sản xuất 30% và dây chuyền C sản xuất 20% số linh kiện. Tỷ lệ phế phẩm của từng dây chuyền lần lượt là 2%, 3% và 1%. Chọn một linh kiện ngẫu nhiên và phát hiện là phế phẩm thì xác suất để linh kiện đó được sản xuất từ dây chuyền A là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi các biến cố:

A: "Linh kiện được sản xuất từ dây chuyền A"

B: "Linh kiện được sản xuất từ dây chuyền B"

C: "Linh kiện được sản xuất từ dây chuyền C"

D: "Linh kiện là phế phẩm".

Dựa vào dữ liệu đề bài ta có: $P(A)=0.5$; $P(B)=0.3$; $P(C)=0.2$; $P(D|A)=0.02$

$P(D|B)=0.03$; $P(D|C)=0.01$.

Xác suất để sản xuất một linh kiện phế phẩm là:

$P(D)=P(A).P(D|A)+P(B).P(D|B)+P(C).P(D|C)=0,5.0,02+0,3.0,03+0,2.0,01=0,021.$

Nếu chọn một linh kiện ngẫu nhiên và phát hiện là phế phẩm thì xác suất để linh kiện đó được sản xuất từ dây chuyền A là: $P(A|D)=P(A).\dfrac{P(D|A)}{P(D)}=0,5.\dfrac{0,02}{0,021}\simeq 0,48$.

Câu 20: Một lớp học có tỉ lệ học sinh nữ là 60%, trong đó tỉ lệ học sinh nam và học sinh nữ tham gia câu lạc bộ Hip hop của trường lần lượt là 25% và 5%. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của lớp có tham gia câu lạc bộ Hip hop, tính xác suất để học sinh đó là nam.

Lời giải

Gọi A là biến cố: " Chọn được học sinh tham gia câu lạc bộ Hip hop " và B là biến cố: "Chọn được học sinh nam". Khi đó ta cần tính $P(B|A)$.

Ta có $P(\overline{B})=0,6$, $P(B)=0,4$ và $P(A|B)=0,25$, $P(A|\overline{B})=0,05$.

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=0,4.0,25+0,6.0,05=0,13$$

Áp dụng công thức Bayes, ta có :

$$P(B|A)=\frac{P(B).P(A|B)}{P(A)}=\frac{0,4.0,25}{0,13}\approx 0.77.$$

Câu 21: Trong một đợt kiểm tra sức khoẻ, có một loại bệnh X mà tỉ lệ người mắc bệnh là $0,2\%$ và một loại xét nghiệm Y mà ai mắc bệnh X khi xét nghiệm Y cũng có phản ứng dương tính. Tuy nhiên, có 6% những người không bị bệnh X lại có phản ứng dương tính với xét nghiệm Y. Chọn ngẫu nhiên 1 người trong đợt kiểm tra sức khoẻ đó. Giả sử người đó có phản ứng dương tính với xét nghiệm Y. Xác suất người đó mắc bệnh X là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Lời giải

Xét các biến cố :

A: "Người được chọn mắc bệnh X";

B: "Người được chọn có phản ứng dương tính với xét nghiệm Y".

Khi đó, $P(A)=0,002$; $P(\overline{A})=1-0,002=0,998$; $P(B|A)=1$; $P(B|\overline{A})=0,06$.

Theo công thức Bayes, ta có: $P(A|B)=\dfrac{P(A).P(B|A)}{P(A).P(B|A)+P(\overline{A}).P(B|\overline{A})}=\dfrac{0,002.1}{0,06188}\approx 0,03.$

Câu 22: Có hai đội thi đấu môn bắn súng. Đội I có 5 vận động viên, đội II có 7 vận động viên. Xác suất đạt huy chương vàng của mỗi vận động viên đội I và đội II lần lượt là $0,65$ và $0,55$. Chọn ngẫu nhiên một vận động viên. Giả sử vận động viên được chọn đạt huy chương vàng. Xác suất để vận động viên này thuộc đội I là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Lời giải

Xét các biến cố sau:

A: "Vận động viên được chọn thuộc đội I";

B: "Vận động viên được chọn đạt huy chương vàng".

Khi đó, $P(A)=\dfrac{5}{12}; P(\overline{A})=\dfrac{7}{12}; P(B\mid A)=0,65; P(B\mid \overline{A})=0,55.$

Theo công thức xác suất toàn phần, xác suất để vận động viên được chọn đạt huy chương vàng là: $P(B)=P(A).P(B\mid A)+P(\overline{A}).P(B\mid \overline{A})=\dfrac{5}{12}.0,65+\dfrac{7}{12}.0.55=\dfrac{71}{120}.$

Theo công thức Bayes, xác suất để vận động viên được chọn đạt huy chương vàng, thuộc đội I là:

$$P(A\mid B)=\frac{P(A).P(B\mid A)}{P(B)}=\frac{\frac{5}{12}.0,65}{\frac{71}{120}}\approx 0,46.$$